Geometria
Appello II — Sessione Invernale — Compito B
Corso di laurea in fisica — a.a. 2019/2020
Tutti i Canali

Durata: 2 ore e 30 minuti

Paolo Bravi　Simone Diverio　Gabriele Mondello　Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

4 febbraio 2020

Esercizio 1. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e si considerino i sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \text{ con } BX = XB \right\}, \; V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \text{ con } BX = -XB \right\}.$$

Determinare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali $U, V, U \cap V, U + V$.

Esercizio 2. Si determinino, nel campo complesso $\mathbb{C}$, tutte le soluzioni per ognuna delle seguenti due equazioni:

$$|z|^2 = \bar{z}^2 \qquad \text{e} \qquad |z|^2 = -\bar{z}^2$$

dove $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e $\bar{z} = a - ib$ è il suo coniugato.

Esercizio 3. Si consideri in $M_2(\mathbb{C})$ la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$.
Calcolare la traccia e il determinante di B e dedurne (possibilmente senza polinomio caratteristico) quali sono gli autovalori di B. Si può concludere da ciò se B è diagonalizzabile? B è simmetrica e/o hermitiana e/o unitaria?

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_2y_2 + x_2y_4 + x_1y_1 + x_3y_3 + x_4y_2.$$

Stabilire se g è definita positiva e determinare, se esiste, un vettore non nullo $x \in \mathbb{R}^4$ isotropo rispetto a g, ovvero tale che $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 3x_3,\ -3x_1 - x_2 - 3x_3,\ 6x_1 + 5x_3,).$$

Verificare che F è diagonalizzabile, determinando una base di suoi autovettori e una matrice non singolare C tale che, se A è la matrice di F, $A' = C^{-1}AC$ sia diagonale.

Soluzioni

Esercizio 1. Eseguendo i prodotti BX e XB abbiamo:

$$BX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad XB = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 \\ x_3 + x_4 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Ne seguono le equazioni dei sottospazi vettoriali U e V:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_3 = x_1 + x_2 \\ x_2 + x_4 = \quad x_1 \\ \quad x_1 \quad = x_3 + x_4 \\ \quad x_2 \quad = \quad x_3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} x_1 + x_3 = -x_1 - x_2 \\ x_2 + x_4 = \quad -x_1 \\ \quad x_1 \quad = -x_3 - x_4 \\ \quad x_2 \quad = \quad -x_3 \end{cases}$$

Ne seguono le equazioni semplificate

$$U : x_2 = x_3, x_1 = x_2 + x_4 \qquad \text{e} \qquad V : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

e che

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t+s & t \\ t & s \end{pmatrix} \right\}$$

ha dimensione 2 e base data dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. V è invece il sottospazio vettoriale nullo, di dimensione 0. Pertanto $U + V = U$ (con la stessa base e dimensione di U) e $U \cap V = V$ è il sottospazio vettoriale nullo.

Esercizio 2. Esplicitando in parte reale e immaginaria abbiamo:

$$z = x + iy, \quad |z|^2 = x^2 + y^2, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \bar{z}^2 = (x^2 - y^2) - 2ixy. \qquad .$$

Le due equazioni assegnate si possono dunque riscrivere nel seguente modo:

$$(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2) - 2ixy \qquad \text{e} \qquad (x^2 + y^2) = -(x^2 - y^2) + 2ixy.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni della prima equazione consiste dell'asse x ($y = 0$ ovvero i numeri reali puri). L'insieme delle soluzioni della seconda equazione consiste invece dell'asse y ($x = 0$, ovvero i numeri immaginari puri.

Esercizio 3. Traccia e determinante di B sono entrambi nulli:

$$tr\, B = -2 + 2 = 0, \quad \det A = (-2)2 - 4i^2 = -4 + 4 = 0.$$

Ne segue che i due autovalori complessi λ_1, λ_2 di B hanno somma e prodotto nulli: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, e pertanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Se B fosse diagonalizzable, essa dovrebbe quindi essere simile alla matrice nulla $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che evidentemente è simile solo a se stessa. Ne segue che B non è diagonalizzabile.

Per completare le risposte, si osservi che

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} = B, \qquad \overline{B}^t = \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} \neq B,$$

$$B\overline{B}^t = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8i \\ -8i & 8 \end{pmatrix} \neq I,$$

e quindi B è simmetrica, non hermitiana e non unitaria.

Esercizio 4. La forma quadratica associata a g è

$$g(\vec{x}, \vec{x}) = 3x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_4.$$

Da essa vediamo subito che g non è definita positiva. Risulta infatti che p. es. scegliendo $\vec{x} = (0, 1, 0, -2)$ risulta $g(\vec{x}, \vec{x}) = 3 - 4 = -1 < 0$ e per $\vec{x} = (0, 0, 0, 1)$ si ha l'esempio richiesto di vettore isotropo non nullo: $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

Esercizio 5. La matrice associata a F rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

da cui l'equazione caratteristica di F

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & -3 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ 6 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

e gli autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1. Scriviamo ora le equazioni dei rispettivi autospazi. Per $\lambda_1 = -1$ si ha:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} -3x_1 \quad -3x_3 = 0 \\ -3x_1 \quad -3x_3 = 0 \\ 6x_1 \quad 6x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_1} = \{(t_1, t_2, -t_1)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(1, 0, -1) + t_2(0, 1, 0)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_1} è dunque costituita dagli autovettori $\vec{v}_1' = (1, 0, -1), \vec{v}_2' = (0, 1, 0)$. Si ha allora dim $V_{\lambda_1} = 2$ e quindi la molteplicità geometrica di λ_1 è 2. Si ha poi, per $\lambda_2 = 2$:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -6x_1 \qquad\qquad -3x_3 = 0 \\ -3x_1 \quad -3x_2 \quad -3x_3 = 0 \\ 6x_1 \qquad\qquad 3x_3 = 0 \end{cases},$$

e quindi $V_{\lambda_2} = \{t(1, -2, 1)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_2} è data dall' autovettore $\vec{v}_3' = (1, 1, -2)$, e dim $V_{\lambda_2} = 1$ e quindi la molteplicità geometrica di λ_2 è 1. Ne segue che F è diagonalizzabile.

Una base di V, costituita da autovettori di F è dunque $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3')$. La matrice associata a F rispetto a tale base è la matrice diagonale

$$A' : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$ è la matrice che ha per colonne rispettivamente le coordinate dei vettori $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'$ nella base canonica. Pertanto:

$$C : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$